SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Angelo Favini

ANALITICITÀ DEL SEMIGRUPPO GENERATO DA UN OPERATORE DIFFERENZIALE DEGENERE IN $C_0[0,1]$

10 aprile 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Si danno condizioni sui coefficienti α e β affinché l'operatore differenziale degenere del secondo ordine $A_0u = \alpha(x)u''+\beta(x)u'$, con dominio $D(A_0)$ dato da $\{u\in C_0[0,1]\cap C^2(0,1);\ A_0u\in C_0[0,1]\}$, dove $\alpha, \beta\in C[0,1]$, $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x)>0$ su $(0,1)$, generi un semigruppo non solamente fortemente continuo su $C_0[0,1]$ ma anche infinitamente differenziabile e analitico reale.

Abstract. We give conditions on the coefficients α and β guaranteing that the second order degenerate differential operator $A_0u = \alpha(x)u''+\beta(x)u'$, with domain $D(A_0)$ given by $\{u\in C_0[0,1]\cap C^2(0,1);\ A_0u\in C_0[0,1]\}$, where $\alpha, \beta\in C[0,1]$, $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x)>0$ on $(0,1)$, generates a strongly continuous semigroup on $C_0[0,1]$ that is infinitely differentiable and real analytic too.

1. Introduzione

Sia $C_0[0,1]$ lo spazio

$$C_0[0,1] = \{u \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1);\ A_0 u \in C_0[0,1]\},$$

munito della norma uniforme

$$\|u\|_{C_0[0,1]} = \sup_x |u(x)|$$

e siano α, β due funzioni a valori reali tali che

(1) $\qquad \alpha, \beta \in C_0[0,1],\ \alpha(x)>0$ per ogni $x \in (0,1)$.

Nello spazio $C_0[0,1]$ consideriamo l'operatore

(2) $\qquad A_0 u := \alpha(x)u'' + \beta(x)u'$,

dove

$$D(A_0) = \{u \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1);\ A_0 u \in C_0[0,1]\}.$$

In questo seminario esporrò condizioni sui coefficienti α e β che garantiscono non solo che A_0 generi un semigruppo fortemente continuo in $C_0[0,1]$ ma anche infinitamente differenziabile e analitico reale.
Chiaramente, tale proprietà è strettamente legata alla regolarità del semigruppo generato in $C[0,1]$ dall'operatore

$$\tilde{A}u = \alpha(x)u'' + \beta(x)u',$$

con $D(\tilde{A}) = \{u \in C[0,1] \cap C^2(0,1);\ \alpha(x)u'' + \beta(x)u' \in C_0[0,1]\}$, cioé, u appartiene a $D(\tilde{A})$ se e solo se soddisfa le condizioni ai limiti di tipo Ventcel.
Esse hanno grande importanza in probabilità e sono state ampiamente e anche molto recentemente studiate, dopo che Clément e Timmermans stabilirono in [2] le condizioni necessarie e sufficienti (su α e β) affinché $\tilde{A}$ generi un semigruppo di classe C_0 in $C[0,1]$.
Come riferimenti, voglio citare Favini e Romanelli [5], Favini, Goldstein e Romanelli [6], Fichera [7]. Risultati interessantissimi sulla analiticità (complessa) del semigruppo generato da $\tilde{A}$ in $C[0,1]$ sono stati descritti da G.Metafune [9] e da M.Campiti e G.Metafune [3].
Le condizioni di tipo Ventcel non sono le sole che possono essere associate ad un operatore degenere come $\alpha(x)u'' + \beta(x)u'$, per opportuni coefficienti α e β.
Si potrebbero, per esempio, considerare le condizioni di Neumann singolari (vedi Campiti, Metafune, Pallara [4])

$$\exp\Big(\int_{1/2}^{x} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,ds\Big)\, u'(x) \to 0 \quad \text{per} \quad x \to 0,1.$$

I risultati principali di questo seminario sono contenuti in un lavoro in collaborazione con V.Barbu che sarà pubblicato nei Proceedings della 3ª Conferenza su Analisi Funzionale e Teoria dell'Approssimazione tenutasi ad Acquafredda di Maratea nel settembre 1996.

2. Teoremi di generazione

Introduciamo la condizione sui coefficienti

$$\frac{\beta}{\alpha} \in L^1(0,1),\ \frac{x(1-x)}{\alpha} \in L^1(0,1) \tag{3}$$

e poniamo

$$w(x) = \alpha(x) \exp\Big(-\int_0^x \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,ds\Big),$$

$$\eta(x) = \exp\Big(\int_0^x \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,ds\Big), \qquad x \in (0,1).$$

Se $H_0^1(0,1)$ denota lo spazio di Sobolev

$$\{u \in L^2(0,1);\ u' \in L^2(0,1),\ u(0)=0=u(1)\}$$

e

$$X=\{u \in L^2(0,1);\ \frac{u}{w^{1/2}} \in L^2(0,1)\},$$

X viene munito del prodotto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 \frac{u\bar{v}}{w}\,dx$$

che lo rende uno spazio di Hilbert.
In virtù dell'assunzione (3) si vede facilmente che

$$H_0^1(0,1) \subset X \tag{4}$$

algebricamente e topologicamente.
Basta infatti notare che per ogni $u \in H_0^1(0,1)$ e per tutti gli $x \in (0,1)$

$$|u(x)| \le \sqrt{x}\,\|u\|_{H_0^1},\ |u(x)| \le \sqrt{1-x}\,\|u\|_{H_0^1}, \tag{5}$$

da cui (4) segue.
Cominciamo col considerare l'operatore $A: D(A)(\subseteq X) \to X$,

$$Au = \alpha u'' + \beta u',\ \forall u \in D(A),\ D(A)= \{u \in H_0^1(0,1);\ Au \in X\}. \tag{6}$$

Tenendo presente che

(7) $\quad Au = w(u'\eta)'$, per ogni $u \in D(A)$,

dove la derivata è considerata nel senso delle distribuzioni su (0,1), si ha :

Lemma 1. *Sotto le assunzioni (1) e (3), l'operatore* A *è autoaggiunto, definito negativo, con* A^{-1} *compatto.*

Dimostrazione. Si ha

$$(8) \qquad \langle Au, v\rangle = -\int_0^1 u'\bar{v}'\eta\, dx, \text{ per ogni } u, v \in D(A).$$

Infatti,

$$\langle Au, v\rangle = [\eta u'\bar{v}]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u'\bar{v}'\eta\, dx$$

e l'ultimo integrale è convergente perchè $u, v \in H_0^1(0,1)$ e vale (3). Pertanto esistono

$$\lim_{x\to 0+} \eta(x)u'(x)\bar{v}(x) \in \mathbb{C}, \quad \lim_{x\to 1-} \eta(x)u'(x)\bar{v}(x) \in \mathbb{C}.$$

Consideriamo il primo limite e denotiamolo con μ. Se $\mu \neq 0$, per la (3) e la (5)

$$\int_0^\delta |\eta u'|^2\, dx \geq \frac{|\mu|^2}{2}(\|v\|_{H_0^1})^{-2} \int_0^\delta x^{-1}\, dx = +\infty$$

su un intervallo $(0,\delta) \subseteq (0,1)$. Poichè si è ottenuta una contraddizione, μ deve essere nullo.
Una seconda integrazione per parti mostra che A è simmetrico. Poichè la teoria delle forme sesquilineari coercive mostra come in Barbu, Favini e Romanelli [1] che I-A è su X, si conclude che A è autoaggiunto. L'uguaglianza (8) mostra anche che
$A^{-1} \in L(X; H_0^1(0,1))$. Inoltre, se $\{f_n\}$ è una successione limitata in X e $u_n = A^{-1}f_n$, poichè $\{u_n\}$ è limitata in $H_0^1(0,1)$, per la (3) e la (5)

$$\frac{|u_n|^2}{w} \leq C\frac{|u_n|^2}{x}\frac{x}{\alpha} \leq C\frac{x}{\alpha}\|u_n\|^2_{H_0^1}, \qquad 0<x<1/2,$$

$$\frac{|u_n|^2}{w} \leq C\frac{1-x}{\alpha}\|u_n\|^2_{H_0^1}, \qquad 1/2<x<1,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{|u_n|^2}{w}\,dx \le C\left(\int_0^1 \frac{x(1-x)}{\alpha}\,dx\right)\|u_n\|^2_{H_0^1} \le C'$$

D'altro canto, per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta(\varepsilon)>0$ tale che

$$\int_0^t \frac{|u_n|^2}{w}\,dx + \int_{1-t}^1 \frac{|u_n|^2}{w}\,dx \le \varepsilon, \qquad 0<t\le\delta(\varepsilon),$$

cosicchè c'è una sottosuccessione, che denotiamo ancora con u_n, tale che $\frac{u_n}{\sqrt{w}} \to \frac{u}{\sqrt{w}}$ in $L^2(t, 1-t)$. Segue che $\{u_n\}$ è compatta in X, come asserito. #

In forza del Lemma 1 c'è una successione $\{\lambda_n\} \to +\infty$, $\lambda_n>0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e c'è una successione $\{\phi_n\}$, $\phi_n\in X$, sistema ortonormale in X, tale che $A\phi_n = -\lambda_n\phi_n$, cioè

$$(9)\qquad \begin{cases}\alpha\phi_n''+\beta\phi_n' = -\lambda_n\phi_n, & \text{q.d. in } (0,1),\\ \phi_n(0) = 0 = \phi_n(1).\end{cases}$$

Inoltre $\phi_n \in H_0^1(0,1) \subset C_0[0,1]$ e

$$(10)\qquad \lambda_n = \int_0^1 \eta(x)|\phi_n'(x)|^2\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

Poichè $\alpha\phi_n'' \in L^2(0,1)$, dalla (9) segue che $\phi_n \in C^1(0,1)$ e $\alpha\phi_n'' \in C(0,1)$. Pertanto si può supporre $\phi_n \in C^2(0,1)\cap C_0[0,1]$, cioè $\phi_n \in D(A_0)$.
Prima di passare alla soluzione in $C_0[0,1]$, vogliamo estendere il risultato di Favini, Goldstein, Romanelli [6], relativo al caso $\alpha u''$, all'operatore differenziale $\alpha u''+\beta u'$. Dobbiamo così introdurre l'operatore

$$A_1u = \alpha u''+\beta u',\ \forall u\in D(A_1),$$
$$D(A_1) = \{u\in H_0^1(0,1);\ A_1u\in H_0^1(0,1)\}.$$

Si ha

Lemma 2 *Sotto le assunzioni (1) e (3),* A_1 *è autoaggiunto, definito negativo in* $H_0^1(0,1)$ *e così* A_1 *genera un semigruppo analitico in* $H_0^1(0,1)$

Dimostrazione. Cominciamo col mostrare che A_1 è simmetrico. Poichè $A_1u = w(\eta u')'$ e, in virtù della (3),

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_0^1 \eta(x)u'(x)\overline{v}'(x)\,dx$$

è un prodotto interno in $H_0^1(0,1)$ equivalente a quello usuale in tale spazio, vediamo che

$$\langle A_1 u, v\rangle_1 = \int_0^1 (w(x)(\eta(x)u'(x))')'\eta(x)\overline{v}'(x)\,dx =$$

$$= [\alpha(x)(\eta(x)u'(x))')\overline{v}'(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 w(x)(\eta(x)u'(x))'(\eta(x)\overline{v}'(x))'\,dx\,.$$

Il primo addendo si annulla. Infatti, poichè $A_1 u \in H_0^1(0,1)$, sappiamo che

$$|w(x)(\eta(x)u'(x))'| \le \sqrt{x}\,\|\alpha u''+\beta u'\|_{H_0^1}\,,$$

$$|w(x)(\eta(x)u'(x))'| \le \sqrt{1-x}\,\|\alpha u''+\beta u'\|_{H_0^1}\,.$$

Dalla espressione di $\langle A_1 u, v\rangle_1$ segue che necessariamente esistono i limiti

$$\lim_{x\to 0+} \alpha(x)(\eta(x)u'(x))'\overline{v}'(x) = \mu \in \mathbb{C}, \qquad \lim_{x\to 1-} \alpha(x)(\eta(x)u'(x))'\overline{v}'(x) \in \mathbb{C}.$$

Se $\mu \neq 0$, in un intorno di 0 c'è una costante C tale che

$$|v'(x)| \ge C\eta(x)^{-1}\,x^{-1/2}$$

e quindi $\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx$ non può convergere. Dunque

$$\langle A_1 u, v\rangle_1 = -\int_0^1 w(x)(\eta(x)u'(x))'(\eta(x)\overline{v}'(x))'\,dx\,.$$

D'altra parte, ogni $u \in D(A_1)$ appartiene allo spazio V, dove

$$V = \{u \in H_0^1(0,1);\ \int_0^1 w(x)|(\eta(x)u'(x))'|^2\,dx < \infty\}$$

munito della norma naturale. V è anche il completamento di $C_0^\infty(0,1)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_V^2 := \int_0^1 \eta(x)|u'(x))|^2\,dx + \int_0^1 w(x)|(\eta(x)u'(x))'|^2\,dx.$$

Infatti, per ogni $u \in V$ si ha

$$\int_0^1 |u(x)|^2\,dx \;\le\; C\int_0^1 \eta(x)|u(x))|^2\,dx =$$

$$= C\,[u(x)(\eta(x)\bar{u}'(x)]_{x=0}^{x=1} - C\int_0^1 u(x)\frac{d}{dx}(\eta(x)\bar{u}'(x))\,dx =$$

$$= C\,[u(x)(\eta(x)\bar{u}'(x)]_{x=0}^{x=1} - C\int_0^1 \frac{u(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}\sqrt{\alpha(x)}\frac{d}{dx}(\eta(x)\bar{u}'(x))\,dx\,.$$

L'ultimo integrale è maggiorato da

$$(\int_0^1 \frac{\eta(x)}{\alpha(x)}|u(x)|^2\,dx)^{1/2}\,(\int_0^1 w(x)|(\eta(x)u'(x))'|^2\,dx)^{1/2}.$$

Ma

$$\int_0^1 \frac{\eta(x)}{\alpha(x)}|u(x)|^2\,dx \le C\int_0^{1/2}\frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)}dx + C\int_{1/2}^1\frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)}dx \le$$

$$\le C'\,[\int_0^{1/2}\frac{x}{\alpha(x)}dx + C\int_{1/2}^1\frac{1-x}{\alpha(x)}dx\,]\,\|u\|^2_{H_0^1},$$

e quindi converge per la (3).

Così esistono i limiti $\lim_{x\to 0,1}\eta(x)u'(x)\bar{u}(x)$. Se $\lim_{x\to 0+}\eta(x)u'(x)\bar{u}(x) = \sigma \neq 0$, da $u\in H_0^1(0,1)$ segue

$$\int_0^\delta |\eta(x)u'(x)|^2\,dx \;\ge\; \frac{|\sigma|^2}{C^2}\int_0^\delta \frac{dx}{x} = +\infty,$$

che contraddice $u\in H_0^1(0,1)$. Naturalmente, la costante C ha la proprietà che $|u(x)| \le C\sqrt{x}$.

L'asserto è quindi provato. Allora la forma sesquilineare

$$b(u,v) = \int_0^1 \eta\,u'\bar{v}'\,dx + \int_0^1 w(\eta u')'(\eta\bar{v}')'\,dx$$

è continua su $V\times V$ e coerciva, perchè $\|u\|_V^2 = b(u,u)$.

Allora, da Tanabe [11, Theorems 2.22, 2.23, pp. 28-29], deduciamo che l'operatore $\bar{B}$ associato a b(u,v) è un isomorfismo da V al suo duale V* e la parte B di $\bar{B}$ in $H_0^1(0,1)$ è definita positiva ed autoaggiunta. Ma $D(B) = \{u \in H_0^1(0,1);\ \bar{B}u \in H_0^1(0,1)\}$ e per ogni $u,v \in D(A_1)$,

$$\langle (I-A_1)u, v\rangle_1 = b(u,v).$$

Pertanto, B coincide con $I-A_1$ e $I-A_1$ è su $H_0^1(0,1)$. #

Corollario 1 *Sotto le assunzioni (1) e (3), se in più* $\beta \in C^1[0,1]$, *allora l'operatore* (W, D(W)), *dove*

$$D(W) = \{u \in H^1(0,1)\ ;\ \alpha u''+\beta u' \in H_0^1(0,1)\},\quad Wu = \alpha u''+\beta u',$$

genera un semigruppo analitico in $H^1(0,1)$.

Dimostrazione. Sia $g \in H_0^1(0,1)$. Dobbiamo mostrare che se $Re\lambda$ è sufficientemente grande, l'equazione

$$\lambda u - Wu = g$$

ha soluzione (necessariamente unica) u tale che

$$\|u\|_{H^1} \le C(1+|\lambda|)^{-1}\, \|g\|_{H^1}.$$

Ora, in virtù delle assunzioni, se introduciamo

$$f_\lambda(x) = g(x) - \{(1-x)g(0)+xg(1)+\frac{\beta(x)}{\lambda}[g(0)-g(1)]\},$$

poichè $f_\lambda \in H_0^1(0,1)$, il Lemma 2 si applica a

$$\lambda v - A_1 v = \lambda v - \alpha v'' - \beta v' = f_\lambda(x), \tag{11}$$

con

$$\|v\|_{H_0^1} \le C'(1+|\lambda|)^{-1}\, \|f_\lambda\|_{H_0^1}.$$

Ma la (11) si scrive equivalentemente

$$\lambda[v+\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}] - \alpha[v+\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}]'' - \beta[v+\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}]' = g.$$

Allora $u = v+\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda} \in H^1(0,1)$ e $\alpha v''+\beta v'+\frac{g(1)-g(0)}{\lambda}\beta \in H_0^1(0,1)$, con

$$\|u\|_{H^1} \leq C_1(1+|\lambda|)^{-1} \|f_\lambda\|_{H_0^1} + C_2 |\lambda|^{-1} \|g\|_{H^1}$$

$$\leq C_3 (1+|\lambda|)^{-1}\|g\|_{H^1},$$

in forza della definizione di f_λ. #

Rivolgiamoci ora all'operatore A_0 definito da (2).
A tal fine, abbiamo bisogno di una ulteriore assunzione su α, β ; precisamente

(12) $$\frac{\beta^2}{\alpha} \in L^\infty(0,1).$$

Si ha

Lemma 3 *Sotto le assunzioni (1), (3) e (12) l'operatore* A_0 *genera un semigruppo contrattivo in* $C_0[0,1]$.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che $f \in C_0[0,1]$ sia a valori reali. Se $\lambda>0$, sia $\{f_\varepsilon\} \subset X$ una successione tale che $f_\varepsilon \to f$ in $C_0[0,1]$ per $\varepsilon \to 0$. Si può senz'altro assumere $f_\varepsilon \in C_0[0,1]$ con supporto $f_\varepsilon \subseteq [\varepsilon,1-\varepsilon]$. Poichè esiste $(\lambda-A)^{-1} \in L(X)$, dove A è definito nella (6), per il Lemma 1, il problema

$$\lambda u_\varepsilon - \alpha \frac{d^2u_\varepsilon}{dt^2} - \beta \frac{du_\varepsilon}{dt} = f_\varepsilon \quad \text{q.o. } x \in (0,1),$$

$$u_\varepsilon(0) = 0 = u_\varepsilon(1),$$

ammette una soluzione unica $u_\varepsilon \in H_0^1(0,1) \subset X$. Inoltre, valgono le seguenti stime

(13) $$\|u_\varepsilon\|_{C_0[0,1]} \leq \|f_\varepsilon\|_{C_0[0,1]}/\lambda, \quad \forall \lambda > \lambda_0 > 0,$$

(14) $$\|u_\varepsilon - u_\sigma\|_{C_0[0,1]} \leq \|f_\varepsilon - f_\sigma\|_{C_0[0,1]}/\lambda, \ \forall \lambda > \lambda_0 > 0, \ \forall \varepsilon, \sigma > 0.$$

Infatti, posto $M_\varepsilon = \lambda^{-1} \|f_\varepsilon\|_{C_0[0,1]}$, si ha

$$\frac{\lambda}{\alpha} (u_\varepsilon - M_\varepsilon) - (u_\varepsilon - M_\varepsilon)'' - \frac{\beta}{\alpha} (u_\varepsilon - M_\varepsilon)' = \frac{1}{\alpha} (f_\varepsilon - \|f_\varepsilon\|_{C_0[0,1]}).$$

Moltiplicando tale equazione per $(u_\varepsilon - M_\varepsilon)^+$ ed integrando quanto ottenuto su (0,1), una applicazione del Lemma di Stampacchia porta a

$$\int_0^1 |(u_\varepsilon - M_\varepsilon)_x^+|^2 dx - \int_0^1 \frac{\beta}{\alpha} (u_\varepsilon - M_\varepsilon)_x^+ \ (u_\varepsilon - M_\varepsilon)^+ dx + \int_0^1 \frac{\lambda}{\alpha} ((u_\varepsilon - M_\varepsilon)^+)^2 dx \leq 0,$$

per ogni $\varepsilon>0$.
D'altro canto,

$$\left|\int_0^1 \frac{\beta}{\alpha}(u_\varepsilon-M_\varepsilon)_x^+\ (u_\varepsilon-M_\varepsilon)^+dx\right| \le \left(\int_0^1 \frac{\beta^2}{\alpha^2}|(u_\varepsilon-M_\varepsilon)^+|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |(u_\varepsilon-M_\varepsilon)_x^+|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\beta^2}{\alpha^2}|(u_\varepsilon-M_\varepsilon)^+|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |(u_\varepsilon-M_\varepsilon)_x^+|^2\,dx.$$

Pertanto, si ottiene dalla stima precedente

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |(u_\varepsilon-M_\varepsilon)_x^+|^2\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\alpha}\left(\lambda - \frac{\beta^2}{2\alpha}\right)|(u_\varepsilon-M_\varepsilon)^+|^2\,dx \le 0.$$

Se prendiamo $\lambda > \frac{1}{2}\left\|\frac{\beta^2}{\alpha}\right\|_{L^\infty(0,1)}$, si vede che $(u_\varepsilon-M_\varepsilon)^+ = 0$ e perciò

$$u_\varepsilon(x) \le \|f_\varepsilon\|_{C_0[0,1]}/\lambda, \text{ per ogni } \varepsilon>0,\ x\in[0,1].$$

Ripetendo un argomento simile al precedente, si ottiene anche

$$u_\varepsilon(x) \ge -\|f_\varepsilon\|_{C_0[0,1]}/\lambda, \text{ per ogni } \varepsilon>0,\ x\in[0,1],$$

per $\lambda>\frac{1}{2}\left\|\frac{\beta^2}{\alpha}\right\|_{L^\infty(0,1)}$. Ciò prova la (13). La (14) si deduce analogamente. La (14) implica che $u_\varepsilon \to u$ in $C[0,1]$ per $\varepsilon \to 0+$. Inoltre, poichè $\{u_\varepsilon\}$ è limitata in $H_0^1(0,1)$, deduciamo che $u_\varepsilon \to u$ debolmente in $H_0^1(0,1)$ e u è una soluzione di $\lambda u - A_0 u = f$.

Per la (13), si ha $\|(\lambda-A_0)^{-1}f\|_{C_0[0,1]} \le \lambda^{-1}\|f\|_{C_0[0,1]}$ per $\lambda > \frac{1}{2}\left\|\frac{\beta^2}{\alpha}\right\|_{L^\infty(0,1)}$. Così $-A_0$ è m-accretivo e ciò implica che la stima $\|(\lambda-A_0)^{-1}f\|_{C_0[0,1]} \le \lambda^{-1}\|f\|_{C_0[0,1]}$ è vera per ogni $\lambda>0$. #

Osservazione. Naturalmente, si potrebbe dimostrare il risultato precedente facendo ricorso al teorema di generazione di Clément e Timmermans [2], e anche sotto condizioni più deboli su α e β. Quì si é voluto dare una prova indipendente da [2].

Per mostrare che il semigruppo generato da A_0 ha una regolarità maggiore, dobbiamo assumere un po' di più di (3). Precisamente, facciamo l'assunzione

$$\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\alpha} \in L^1(0,1). \tag{15}$$

Si ha

Teorema 1 *Sotto le assunzioni (1), (12), (15), l'operatore* A_0 *genera un semigruppo contrattivo e differenziabile in* $C_0[0,1]$ *che é analitico reale su* $(0,\infty)$.

Dimostrazione. La proprietà enunciata di analiticità significa che se S(t) é il semigruppo generato da A_0 in $C_0[0,1]$, allora l'applicazione $t \to S(t)y$ é analitica su $\mathbb{R}^+$ per ogni $y \in C_0[0,1]$. Poiché il semigruppo generato da A in X é un prolungamento di S(t) in virtù dei Lemmi 1 e 3, useremo la stessa notazione per entrambi.
Cominciamo col provare il teorema sotto l'ulteriore ipotesi sul comportamento asintotico degli autovalori λ_n in (9) che

$$C_1(n^N+1) \le \lambda_n \le C_2(n^N+1), \quad n=1,2,... \tag{16}$$

dove $C_1, C_2 > 0$ e N é un numero naturale.
Per ogni $u_0 \in C_0[0,1] \cap X$ vale la rappresentazione

$$(S(t)u_0)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n \, e^{-\lambda_n t} \phi_n(x), \quad \forall t>0, \; 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

dove $u_0^n = \int_0^1 \frac{u_0 \phi_n}{w} dx$, ϕ_n essendo l'autofunzione del problema agli autovalori (9).
Vedi Fichera [7] per un approccio analogo.
In forza delle (10) e (15), esiste C>0 indipendente da $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|\phi_n\|^2_{H_0^1} \le C \lambda_n$$

cosicchè

$$|\phi_n(x)| \le C_1 \lambda_n^{1/2} \sqrt{x(1-x)}, \; 0 \le x \le 1, \tag{18}$$

e

$$|u_0^n(x)| \le C \|u_0\|_{C_0[0,1]} \lambda_n^{1/2} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, w(x)^{-1} dx \tag{19}$$

$$\le C_2 \lambda_n^{1/2} \|u_0\|_{C_0[0,1]}.$$

Ovviamente, per ottenere la (19) abbiamo dovuto usare espressamente la (15).
Mettendo insieme la (18) e la (19) deduciamo dalla (17) che

$$\|S(t)u_0\|_{C_0[0,1]} \le C \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t} \|u_0\|_{C_0[0,1]}, \; \forall t \ge 0.$$

Per densità, ciò implica che $S(t)u_0$ ha la rappresentazione (17) per ogni $t>0$ e ogni $u_0 \in C_0[0,1]$. Inoltre, per tali u_0 si ha $S(t)u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^+;C_0[0,1])$ e

$$(\frac{d^k}{dt^k} S(t)u_0)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n t} \phi_n(x),$$

per ogni $t > 0$ e $0 \le x \le 1$.
Ma allora, in forza delle (18), (19) e della assunzione (16), si ha

$$\|\frac{d^k}{dt^k} S(t)u_0\|_{C_0[0,1]} \le C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{N(k+1)} e^{-ct\, n^N} \|u_0\|_{C_0[0,1]}$$

$$\le C_4 \sum_{j=1}^{\infty} j^{k+1} e^{-cjt} \|u_0\|_{C_0[0,1]}.$$

Segue che per ogni $\delta>0$ fissato e per $t \ge \delta$ si ha

$$\|\frac{d^k}{dt^k} S(t)u_0\|_{C_0[0,1]} \le C \sum_{j=1}^{\infty} j^{k+1} e^{-\gamma j} \|u_0\|_{C_0[0,1]},$$

dove $\gamma\,(=ct) \ge c\delta > 0$. Poichè

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{k+1} e^{-\gamma j} = \frac{d^{k+1}}{d\gamma^{k+1}} ((e^\gamma-1)^{-1}) = \frac{d^k}{d\gamma^k} (\frac{d}{d\gamma}(e^\gamma-1)^{-1})$$

e $f(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}(e^\gamma-1)^{-1}$ è analitica su $(0,\infty)$, otteniamo

$$\|\frac{d^k}{dt^k} S(t)u_0\|_{C_0[0,1]} \le M^k k!$$

su ogni intervallo compatto $[a,b]$ in $t \ge \delta > 0$.
Ciò implica che $S(t)u_0$ è una funzione analitica di t su $(0,\infty)$.
Mostriamo ora che la condizione (16) è in effetti garantita dalle altre assunzioni (1), (12), (15). Prima di tutto osserviamo che sotto le ipotesi del teorema, $\alpha^{-1/2} \in L^1(0,1)$.
Poichè $\alpha u'' + \beta u' = w(\eta u')'$, è stato dimostrato da Niessen e Zettl [10], Theorem 5.2, p. 566, che

$$\frac{\lambda_n}{n^2\pi} \to \int_0^1 \frac{dx}{\alpha(x)^{1/2}} < \infty, \text{ per } n \to \infty.$$

L'ipotesi (16) è quindi soddisfatta. #

Il caso speciale $\alpha(x) = x(1-x)p(x)$, $\beta(x) \equiv 0$, dove $p \in C[0,1]$, $p(x)>0$ per ogni $x \in [0,1]$ è di grande importanza ed è proprio quello esaminato da G. Fichera in [7].

Osservazione La dimostrazione del Teorema 1 mostra in effetti che esistono $N_k \geq 0$ tali che

$$\left\| \frac{d^k}{dt^k} S(t)u_0 \right\|_{C_0[0,1]} \leq \frac{N_k}{t^{k+2}}, \quad t>0, \quad k=0,1,2,....$$

Si noti che sebbene l'analiticità reale di S(t) implica l'analiticità della soluzione u del problema di Cauchy $u'(t)=A_0u(t)$, $t>0$, $u(0)=u_0 \in C_0[0,1]$, (vedi Friedman [8], pp. 206-216), tale proprietà deve essere ben distinta da quella dei semigruppi analitici (olomorfi).

Bibliografia

[1] V.Barbu, A.Favini, S.Romanelli, Degenerate evolution equations and regularity of their associated semigroups, Funkc.Ekv., 39(1996), 421-448..

[2] Ph.Clément, C.A.Timmermans, On C_0-semigroups generated by differential operators satisfying Ventcel's boundary conditions, Indag.Math.89(1986), 379-387.

[3] M.Campiti, G.Metafune, Ventcel's boundary conditions and analytic semigroups, Preprint.

[4] M.Campiti, G.Metafune, D.Pallara, Degenerate Self-adjoint evolution equations on the unit interval, in corso di stampa su "Semigroup Forum".

[5] A.Favini, S.Romanelli, Analytic semigroups on C[0,1] generated by some classes of second order differential operators, in corso di stampa su "Semigroup Forum".

[6] A.Favini, J.A.Goldstein, S.Romanelli, An analytic semigroup associated to a degenerate evolution equation, in "Stochastic Processes and Functional Analysis", Goldstein, Gretsky, Uhl, eds., M.Dekker, 1997, 85-100.

[7] G.Fichera, On a degenerate evolution problem, in "Partial Differential Equations with Real Analysis", Begehr, Jeffrey eds., Pitman Research Notes in Math.Series 263, Longman Scientific and Technical 1992, 15-42.

[8] A.Friedman, "Partial Differential Equations", Holt, Rinehart & Winston, 1969.

[9] G.Metafune, Analiticity for some degenerate one-dimensional evolution equations, Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis 5, 1995/1996, 260-284.

[10] H.D.Niessen, A.Zettl, Singular Sturm-Liouville problems: The Friedrichs extension and comparison of eigenvalues,Proc.London Math.Soc.(3)64(1992), 545-578.

[11] H.Tanabe, "Equations of Evolution", Pitman Monographs and Studies in Math.,Longman, 1979.